华东工业大学学报
第17卷 第3期 J. East China University of Technology Vol.17 No.3 1995

多维 Laplace 变换及其应用

范洪福
（华东工业大学基础部 上海 200093）

摘 要 提出了多维 Laplace 变换的概念，并讨论它在解微分方程中的应用.

关键词 Laplace 变换；微分方程；留数
中图法分类号 O 177.6

Laplace变换是一类重要的积分变换，在线性系统和数理方程中是一种极其重要的工具，给解微分方程带来极大方便．但是，迄今为止，人们只限于讨论一维 Laplace 变换，这极大地限制了它的应用，有必要将 Laplace 变换的概念进行拓广．本文提出多维 Laplace 变换的概念及其性质，并着重讨论它在解微分方程中的应用.

1 多维 Laplace 变换及其逆变换

定义 设 n 元函数 $f(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ 在 $t_1 \geqslant 0, t_2 \geqslant 0, \cdots, t_n \geqslant 0$ 上有定义，且积分

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\cdots\int_0^{+\infty} f(t_1, t_2, \cdots, t_n)\mathrm{e}^{-(s_1t_1+s_2t_2+\cdots+s_nt_n)}\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_n$$

在 C^n 的某一区域内收敛（$(s_1, s_2, \cdots, s_n) \in C^n$, C^n 是 n 维复数域），则称此积分为 $f(t_1, \cdots, t_n)$ 的 n 维 Laplace 变换（或称象函数），记为

$$F(s_1, s_2, \cdots, s_n) = \mathscr{L}[f(t_1, t_2, \cdots, t_n)] = \mathscr{L}[f]$$

$$= \int_0^{+\infty}\cdots\int_0^{+\infty} f(t_1, \cdots, t_n)\mathrm{e}^{-(s_1t_1+\cdots+s_nt_n)}\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_n;$$

称 $f(t_1, \cdots, t_n)$ 为 $F(s_1, \cdots, s_n)$ 的 n 维 Laplace 逆变换（或称象原函数），记为

$$f(t_1, \cdots, t_n) = \mathscr{L}^{-1}[F(s_1, \cdots, s_n)] = \mathscr{L}^{-1}[F].$$

n维 Laplace 变换的存在定理 若 $f(t_1, \cdots, t_n)$ 满足

a. 在$[0, +\infty)^n$的任一有界区域上分段连续；

收稿日期：1995－04－03

b. 存在常数 $M\geqslant 0, c_1\geqslant 0, c_2\geqslant 0, \cdots, c_n\geqslant 0$, 使得 $|f(t_1, \cdots, t_n)|\leqslant M\cdot e^{c_1t_1+c_2t_2+\cdots+c_nt_n}$, $\forall(t_1, \cdots, t_n)\in[0, +\infty)^n$, (此时称 $f(t_1, \cdots, t_n)$ 的增长是指数级的，$c_1, c_2, \cdots, c_n$ 为 f 的增长指数). 则 $f(t_1, \cdots, t_n)$ 的 n 维 Laplace 变换

$$F(s_1, \cdots, s_n)=\int_0^{+\infty}\cdots\int_0^{+\infty} f(t_1, \cdots, t_n)e^{-(s_1t_1+\cdots+s_nt_n)}dt_1dt_2\cdots dt_n \tag{1}$$

在区域 $\mathrm{Re}(s_1)>c_1, \mathrm{Re}(s_2)>c_2, \cdots, \mathrm{Re}(s_n)>c_n$ 内存在，且函数 $F(s_1, \cdots, s_n)$ 关于复变量 $s_1, \cdots, s_n$ 是 n 元全纯函数. 此时右端积分绝对收敛而且一致收敛.

证 设 $s_i=\beta_i+j\omega_i(i=1, 2, \cdots, n, \ j=\sqrt{-1})$, 则当 $\beta_i-c_i\geqslant\varepsilon_i>0$, 即 $\beta_i\geqslant c_i+\varepsilon_i$ 时，有

$$|f(t_1, \cdots, t_n)e^{-(s_1t_1+\cdots+s_nt_n)}|\leqslant Me^{c_1t_1+\cdots+c_nt_n}\cdot e^{-[(c_1+\varepsilon_1)t_1+\cdots+(c_n+\varepsilon_n)t_n]}$$
$$=Me^{-(\varepsilon_1t_1+\cdots+\varepsilon_nt_n)},$$

故

$$\int_0^{+\infty}\cdots\int_0^{+\infty}|f(t_1, \cdots, t_n)e^{-(s_1t_1+\cdots+s_nt_n)}|dt_1dt_2\cdots dt_n$$
$$\leqslant\int_0^{+\infty}\cdots\int_0^{+\infty}Me^{-(\varepsilon_1t_1+\cdots+\varepsilon_nt_n)}dt_1dt_2\cdots dt_n=\frac{M}{\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n},$$

因此式(1)的右端不仅绝对收敛而且一致收敛.

由于 $e^{-(s_1t_1+\cdots+s_nt_n)}$ 关于 $s_1, \cdots, s_n$ 的 n 重幂级数展开式在 $(t_1, \cdots, t_n)\in R^n$ 及 $(s_1, \cdots, s_n)\in C^n$ 内的任何有界区域上一致收敛和绝对收敛，故由已证结果可知，在区域 $\mathrm{Re}(s_1)>c_1, \cdots, \mathrm{Re}(s_n)>c_n$ 内 $F(s_1, \cdots, s_n)$ 是 n 元全纯函数.　证毕.

实践中，许多常见的多元函数均满足存在定理的条件，因此，它们的多维 Laplace 变换是存在的. 下面举一例说明之.

例 1　求函数 $f(t_1, t_2, t_3)=e^{at_1}+e^{bt_2}+e^{ct_3}$ 的三维 Laplace 变换.

解　因 $|e^{at_1}+e^{bt_2}+e^{ct_3}|\leqslant 3e^{c_1t_1+c_2t_2+c_3t_3}$, $(t_1, t_2, t_3\geqslant 0)$, 其中 $c_1=\max\{a, 0\}$, $c_2=\max\{b, 0\}$, $c_3=\max\{c, 0\}$, 所以，$f(t_1, t_2, t_3)$ 的三维 Laplace 变换存在，且

$$F(s_1, s_2, s_3)=\mathscr{L}[f(t_1, t_2, t_3)]=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}(e^{at_1}+e^{bt_2}+e^{ct_3})\cdot e^{-(s_1t_1+s_2t_2+s_3t_3)}dt_1dt_2dt_3$$
$$=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-(s_1-a)t_1}\cdot e^{-(s_2t_2+s_3t_3)}dt_1dt_2dt_3$$
$$+\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-(s_2-b)t_2}\cdot e^{-(s_1t_1+s_3t_3)}dt_1dt_2dt_3$$
$$+\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-(s_3-c)t_3}\cdot e^{-(s_1t_1+s_2t_2)}dt_1dt_2dt_3$$
$$=\frac{1}{(s_1-a)s_2s_3}+\frac{1}{s_1(s_2-b)s_3}+\frac{1}{s_1s_2(s_3-c)}, \quad (\mathrm{Re}(s_i)>c_i, \quad i=1, 2, 3).$$

关于多维 Laplace 逆变换，我们有如下的反演公式.

定理 设 $f(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ 满足存在定理的条件，记

$$F_i(s_1, s_2, \cdots, s_i)=\int_0^{+\infty}\cdots\int_0^{+\infty} f(t_1, \cdots, t_n)e^{-(s_1t_1+s_2t_2+\cdots+s_it_i)}dt_1dt_2\cdots dt_i,$$

$(i=1, 2, \cdots, n)$. 若 $s_{i1}, s_{i2}, \cdots, s_{ik_i}$ 是 $F_i(s_1, \cdots, s_i)$ 关于复变量 s_i 的所有奇点，且 $\lim\limits_{s_i\to\infty} F_i(s_1, \cdots, s_i)=0$, $\sigma_i>c_i$, $i=1, \cdots, n$, 则 $f(t_1, \cdots, t_n)=\dfrac{1}{(2\pi j)^n}\displaystyle\int_{\sigma_1-j\infty}^{\sigma_1+j\infty}\cdots\int_{\sigma_n-j\infty}^{\sigma_n+j\infty} F(s_1, \cdots, s_n)e^{s_1t_1+s_2t_2+\cdots+s_nt_n}$ $ds_1ds_2\cdots ds_n=\displaystyle\sum_{l_1=1}^{k_1}\operatorname*{Res}_{s_1=s_{1l_1}}\{\cdots\{\sum_{l_{n-1}=1}^{k_{n-1}}\operatorname*{Res}_{s_{n-1}=s_{n-1l_{n-1}}}\{\sum_{l_n=1}^{k_n}\operatorname*{Res}_{s_n=s_{nl_n}}[F(s_1, \cdots, s_n)e^{s_nt_n}]\}\cdot e^{s_{n-1}t_{n-1}}\}\cdots\}e^{s_1t_1}$.

证 首先，函数 $F_i(s_1, \cdots, s_i)$ 实际上就是 $f(t_1, \cdots, t_n)$ 关于 $t_1, \cdots, t_i$ 的 i 维 Laplace 变换，因此，根据存在定理，$F_i(s_1, \cdots, s_i)$ 是存在的，而且关于 s_i 在区域 $\mathrm{Re}(s_i)>c_i$ 内解析.

其次，由于

$$F_i(s_1, \cdots, s_i)=\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty}\cdots\int_0^{+\infty} f(t_1, \cdots, t_n)e^{-(s_1t_1+\cdots+s_{i-1}t_{i-1})}dt_1\cdots dt_{i-1}\right]\cdot e^{-s_it_i}dt_i,$$

根据文献[1], 有
$$F_{i-1}(s_1, \cdots, s_{i-1})=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma_i-j\infty}^{\sigma_i+j\infty} F_i(s_1, \cdots, s_i)e^{s_it_i}ds_i$$
$$=\sum_{l_i=1}^{k_i}\operatorname*{Res}_{s_i=s_{il_i}}[F_i(s_1, \cdots, s_i)e^{s_it_i}], \quad (i=1, 2, \cdots, n).$$

故
$$f(t_1, t_2, \cdots, t_n)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma_1-j\infty}^{\sigma_1+j\infty} F_1(s_1)e^{s_1t_1}ds_1=\sum_{l_1=1}^{k_1}\operatorname*{Res}_{s_1=s_{1l_1}}[F_1(s_1)e^{s_1t_1}]$$
$$=\cdots=\frac{1}{(2\pi j)^n}\int_{\sigma_1-j\infty}^{\sigma_1+j\infty}\cdots\int_{\sigma_n-j\infty}^{\sigma_n+j\infty} F(s_1, \cdots, s_n)e^{s_1t_1+\cdots+s_nt_n}ds_1\cdots ds_n$$
$$=\sum_{l_1=1}^{k_1}\operatorname*{Res}_{s_1=s_{1l_1}}\{\cdots\{\sum_{l_{n-1}=1}^{k_{n-1}}\operatorname*{Res}_{s_{n-1}=s_{n-1l_{n-1}}}\{\sum_{l_n=1}^{k_n}\operatorname*{Res}_{s_n=s_{nl_n}}[F(s_1, \cdots, s_n)e^{s_nt_n}]\}\cdot e^{s_{n-1}t_{n-1}}\}\cdots\}e^{s_1t_1}.$$

证毕.

例 2 求函数 $F(s_1, s_2, s_3)=\dfrac{1}{(s_1-a)s_2s_3}+\dfrac{1}{s_1(s_2-b)s_3}+\dfrac{1}{s_1s_2(s_3-c)}$ 的三维 Laplace 变换$(a, b, c\in R)$.

解 先设 a, b, c 均不为零. $F(s_1, s_2, s_3)$ 关于 s_3 只有两个一阶极点：$s_{31}=0$, $s_{32}=c$, 且 $\lim\limits_{s_3\to\infty} F(s_1, s_2, s_3)=0$, 故

$$F_2(s_1, s_2) = \operatorname*{Res}_{s_3=0}[F(s_1, s_2, s_3)e^{s_3t_3}] + \operatorname*{Res}_{s_3=c}[F(s_1, s_2, s_3)e^{s_3t_3}]$$
$$= \frac{1}{(s_1-a)s_2} + \frac{1}{s_1(s_2-b)} + \frac{1}{s_1s_2}\cdot e^{ct_3}.$$

$F_2(s_1, s_2)$ 关于 s_2 有两个一阶极点：$s_{21}=0, s_{22}=b$, 且 $\lim\limits_{s_2\to\infty} F_2(s_1, s_2)=0$, 故

$$F_1(s_1) = \operatorname*{Res}_{s_2=0}[F_2(s_1, s_2)e^{s_2t_2}] + \operatorname*{Res}_{s_2=b}[F_2(s_1, s_2)e^{s_2t_2}]$$
$$= \frac{1}{s_1-a} + \frac{1}{s_1}e^{bt_2} + \frac{1}{s_1}e^{ct_3}.$$

$F_1(s_1)$ 关于 s_1 有两个一阶极点：$s_{11}=0, s_{12}=a$, 且 $\lim\limits_{s_1\to\infty} F_1(s_1)=0$, 故

$$f(t_1, t_2, t_3) = \mathscr{L}^{-1}[F(s_1, s_2, s_3)] = \operatorname*{Res}_{s_1=0}[F_1(s_1)e^{s_1t_1}] + \operatorname*{Res}_{s_1=a}[F_1(s_1)e^{s_1t_1}]$$
$$= e^{at_1} + e^{bt_2} + e^{ct_3}.$$

若 a, b, c 中至少有一个为零，则结果不变.

2　性 质

为了讨论多维 Laplace 变换的应用，我们先介绍它的几条基本性质. 这些性质无论对于计算多维 Laplace 变换和逆变换，还是在应用中均是很有用的. 在以下的性质中，凡是要求多维 Laplace 变换的函数均假设满足存在定理的条件，这些函数的增长指数统一地取为 $c_1, c_2, \cdots, c_n$. 为节省篇幅，所有证明均略去.

2.1　线性性质

若 α, β 是常数，$\mathscr{L}[f_i(t_1, \cdots, t_n)] = F_i(s_1, \cdots, s_n), (i=1, 2)$, 则

$$\mathscr{L}[\alpha f_1(t_1, \cdots, t_n) + \beta f_2(t_1, \cdots, t_n)] = \alpha\mathscr{L}[f_1(t_1, \cdots, t_n)] + \beta\mathscr{L}[f_2(t_1, \cdots, t_n)];$$
$$\mathscr{L}^{-1}[\alpha F_1(s_1, \cdots, s_n) + \beta F_2(s_1, \cdots, s_n)] = \alpha\mathscr{L}^{-1}[F_1(s_1, \cdots, s_n)] + \beta\mathscr{L}^{-1}[F_2(s_1, \cdots, s_n)].$$

2.2　微分性质

a. 象原函数的微分性质

若 $\mathscr{L}[f(t_1, \cdots, t_n)] = F(s_1, \cdots, s_n)$, 则有

$$\mathscr{L}\left[\frac{\partial}{\partial t_{k_1}}\cdots\frac{\partial}{\partial t_{k_i}} f(t_1, \cdots, t_n)\right] = \sum_{l_1, \cdots, l_i = 0, 1} (-1)^{i-(l_1+\cdots+l_i)} s_{k_1}^{l_1} s_{k_2}^{l_2} \cdots s_{k_i}^{l_i} \cdot \mathscr{L}_r[f(t_1, \cdots, t_n)|_{t_{k_1}=l_1t_{k_1}, \cdots, t_{k_i}=l_it_{k_i}}]^*$$

$$(1 \leqslant k_1 < k_2 < \cdots < k_i \leqslant n, r = n-i+l_1+\cdots+l_i, i=1, 2, \cdots, n) \tag{2}$$

* 这里 $\mathscr{L}_r$ 表示在 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 中对于剩余的 r 个非零变量取 r 维 Laplace 变换；当 $t_m=0$ 时，相应的函数值是指右极限值. 下同.

$$\mathscr{L}\left[\left(\frac{\partial}{\partial t_i}\right)^k f(t_1, \cdots, t_n)\right] = s_i^k F(s_1, \cdots, s_n) - \sum_{l=0}^{k-1} s_i^{k-1-l} \cdot \mathscr{L}_{n-1}\left[\left(\frac{\partial}{\partial t_i}\right)^l f(t_1, \cdots, t_n)\big|_{t_i=0}\right]$$

$$(i=1, \cdots, n, k \in N) \qquad (3)$$

注：利用以上公式逐步递推，可以求得

$$\mathscr{L}\left[\left(\frac{\partial}{\partial t_1}\right)^{k_1}\left(\frac{\partial}{\partial t_2}\right)^{k_2}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial t_n}\right)^{k_n} f(t_1, t_2, \cdots, t_n)\right] \quad (k_1, k_2, \cdots, k_n = 0, 1, 2, \cdots).$$

b. 象函数的微分性质

若 $\mathscr{L}[f(t_1, \cdots, t_n)] = F(s_1, \cdots, s_n)$，则有

$$\left(\frac{\partial}{\partial s_1}\right)^{k_1}\left(\frac{\partial}{\partial s_2}\right)^{k_2}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial s_n}\right)^{k_n} F(s_1, s_2, \cdots, s_n) = \mathscr{L}[(-t_1)^{k_1}(-t_2)^{k_2}\cdots(-t_n)^{k_n} f(t_1, \cdots, t_n)],$$

$$(k_1, k_2, \cdots, k_n = 0, 1, 2, \cdots, \mathrm{Re}(s_i) > c_i, i = 1, 2, \cdots, n).$$

2.3 积分性质

a. 象原函数的积分性质

若 $\mathscr{L}[f(t_1, \cdots, t_n)] = F(s_1, \cdots, s_n)$，则有

$$\mathscr{L}\left\{\underbrace{\int_0^{t_n} \mathrm{d}t_n \cdots \int_0^{t_n} \mathrm{d}t_n}_{r_n \text{次}}\left\{\cdots\left\{\underbrace{\int_0^{t_1} \mathrm{d}t_1 \cdots \int_0^{t_1}}_{r_1 \text{次}} f(t_1, \cdots, t_n)\mathrm{d}t_1\right\}\cdots\right\}\right\} = \frac{F(s_1, s_2, \cdots, s_n)}{s_1^{r_1} s_2^{r_2} \cdots s_n^{r_n}},$$

$$(r_i = 0, 1, 2, \cdots, \mathrm{Re}(s_i) > \max\{0, c_i\}, i = 1, \cdots, n).$$

b. 象函数的积分性质

若 $\mathscr{L}[f(t_1, \cdots, t_n)] = F(s_1, \cdots, s_n)$，则有

$$\mathscr{L}\left[\frac{f(t_1, \cdots, t_n)}{t_1^{r_1} t_2^{r_2} \cdots t_n^{r_n}}\right] = \underbrace{\int_{s_n}^{\infty} \mathrm{d}s_n \cdots \int_{s_n}^{\infty} \mathrm{d}s_n}_{r_n \text{次}}\left\{\cdots\left\{\underbrace{\int_{s_1}^{\infty} \mathrm{d}s_1 \cdots \int_{s_1}^{\infty}}_{r_1 \text{次}} F(s_1, \cdots, s_n)\mathrm{d}s_1\right\}\cdots\right\},$$

$$(r_i = 0, 1, 2, \cdots, \mathrm{Re}(s_i) > c_i, i = 1, 2, \cdots, n).$$

2.4 分离性质

若 $f(t_1, \cdots, t_n) = f_1(t_{k_0+1}, \cdots, t_{k_1}) f_2(t_{k_1+1}, \cdots, t_{k_2}) \cdots f_r(t_{k_{r-1}+1}, \cdots, t_{k_r})$，$\mathscr{L}[f(t_1, \cdots, t_n)] = F(s_1, \cdots, s_n)$，

$$F_i(s_{k_{i-1}+1}, \cdots, s_{k_i}) = \mathscr{L}_{k_i - k_{i-1}}[f_i(t_{k_{i-1}+1}, \cdots, t_{k_i})] = \int_0^{+\infty} \cdots \int_0^{+\infty} f_i(t_{k_{i-1}+1}, \cdots, t_{k_i}) \mathrm{e}^{-(s_{k_{i-1}+1} t_{k_{i-1}+1} + \cdots + s_{k_i} t_{k_i})}$$

$\mathrm{d}t_{k_{i-1}+1} \cdots \mathrm{d}t_{k_i}$，　$(0 = k_0 < k_1 < \cdots < k_r = n, i = 1, 2, \cdots, r)$，

则　$F(s_1, \cdots, s_n) = F_1(s_{k_0+1}, \cdots, s_{k_1}) F_2(s_{k_1+1}, \cdots, s_{k_2}) \cdots F_r(s_{k_{r-1}+1}, \cdots, s_{k_r})$.

2.5 位移性质

若 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为常数，$\mathscr{L}[f(t_1, \cdots, t_n)] = F(s_1, \cdots, s_n)$, 则有

$$\mathscr{L}[\mathrm{e}^{a_1t_1+\cdots+a_nt_n} \cdot f(t_1, \cdots, t_n)] = F(s_1 - a_1, \cdots, s_n - a_n), \quad (\mathrm{Re}(s_i - a_i) > c_i, \ i = 1, 2, \cdots, n).$$

2.6 延迟性质

若 $\mathscr{L}[f(t_1, \cdots, t_n)] = F(s_1, \cdots, s_n)$, 当 $t_i < 0 (i = 1, \cdots, n)$ 时，$f(t_1, \cdots, t_n) = 0$, 则对于任意 $\tau_1 \geqslant 0, \tau_2 \geqslant 0, \cdots, \tau_n \geqslant 0$, 有

$$\mathscr{L}[f(t_1 - \tau_1, t_2 - \tau_2, \cdots, t_n - \tau_n)] = \mathrm{e}^{-(s_1\tau_1+\cdots+s_n\tau_n)} F(s_1, \cdots, s_n).$$

2.7 相似性质

若 $\mathscr{L}[f(t_1, \cdots, t_n)] = F(s_1, \cdots, s_n), a_1 > 0, a_2 > 0, \cdots, a_n > 0$, 则

$$\mathscr{L}[f(a_1t_1, a_2t_2, \cdots, a_nt_n)] = \frac{1}{a_1a_2\cdots a_n} F\left(\frac{s_1}{a_1}, \frac{s_2}{a_2}, \cdots, \frac{s_n}{a_n}\right), (\mathrm{Re}(s_i) > a_ic_i, \ i = 1, 2, \cdots, n).$$

2.8 乘积性质

设 $f_1(t_1, \cdots, t_n)$ 和 $f_2(t_1, \cdots, t_n)$ 的增长指数分别为 $c_1, \cdots, c_n$ 和 $d_1, \cdots, d_n$, $\mathscr{L}[f_i(t_1, \cdots, t_n)] = F_i(s_1, \cdots, s_n)$, $(i = 1, 2)$, 则

$$\mathscr{L}[f_1(t_1, \cdots, t_n)f_2(t_1, \cdots, t_n)] = \frac{1}{(2\pi \mathrm{j})^n} \int_{\sigma_1 - \mathrm{j}\infty}^{\sigma_1 + \mathrm{j}\infty} \cdots \int_{\sigma_n - \mathrm{j}\infty}^{\sigma_n + \mathrm{j}\infty} F_1(p_1, p_2, \cdots, p_n)$$

$$\cdot F_2(s_1 - p_1, s_2 - p_2, \cdots, s_n - p_n)\mathrm{d}p_1 \cdots \mathrm{d}p_n, \quad (\sigma_i > c_i, \mathrm{Re}(p_i) = \sigma_i, \mathrm{Re}(s_i) > \sigma_i + d_i, i = 1, 2, \cdots, n).$$

2.9 卷积性质

如果 $f_1(t_1, \cdots, t_n)$ 和 $f_2(t_1, \cdots, t_n)$ 满足存在定理条件，则它们的卷积定义为

$$f_1(t_1, \cdots, t_n) * f_2(t_1, \cdots, t_n) = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \cdots \int_0^{t_n} f_1(\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_n) f_2(t_1 - \tau_1, t_2 - \tau_2, \cdots, t_n - \tau_n) \mathrm{d}\tau_1 \cdots \mathrm{d}\tau_n.$$

我们有如下的卷积性质：

若 $\mathscr{L}[f_i(t_1, \cdots, t_n)] = F_i(s_1, \cdots, s_n), \quad i = 1, 2,$

则有　$\mathscr{L}[f_1(t_1, \cdots, t_n) * f_2(t_1, \cdots, t_n)] = F_1(s_1, \cdots, s_n)F_2(s_1, \cdots, s_n).$

例 3　设 $f(t_1, t_2, t_3, t_4) = t_3\mathrm{e}^{2t_4} \cdot \cos(t_1 + t_2)$, 求 $\mathscr{L}[f(t_1, t_2, t_3, t_4)]$.

解　由分离性质有

$$F(s_1, s_2, s_3, s_4) = \mathscr{L}[f(t_1, t_2, t_3, t_4)] = \mathscr{L}_1[t_3] \cdot \mathscr{L}_1[\mathrm{e}^{2t_4}] \cdot \mathscr{L}_2[\cos(t_1 + t_2)].$$

而 $\mathscr{L}_1[t_3]=\dfrac{1}{s_3^2}$ ，$\mathscr{L}_1[e^{2t_4}]=\dfrac{1}{s_4-2}$.

对于 $\mathscr{L}_2[\cos(t_1+t_2)]$，由于 $\dfrac{\partial^2}{\partial t_1\partial t_2}\cos(t_1+t_2)=-\cos(t_1+t_2)$，根据微分性质有：

$$\begin{aligned}-\mathscr{L}_2[\cos(t_1+t_2)]&=\mathscr{L}_2\left[\frac{\partial^2}{\partial t_1\partial t_2}\cos(t_1+t_2)\right]\\&=s_1s_2\mathscr{L}_2[\cos(t_1+t_2)]-s_1\mathscr{L}_1[\cos t_1]-s_2\mathscr{L}_1[\cos t_2]+1\\&=s_1s_2\mathscr{L}_2[\cos(t_1+t_2)]-\frac{s_1^2}{s_1^2+1}-\frac{s_2^2}{s_2^2+1}+1\\&=s_1s_2\mathscr{L}_2[\cos(t_1+t_2)]-\frac{s_1^2s_2^2-1}{(s_1^2+1)(s_2^2+1)}\ ,\end{aligned}$$

故 $\mathscr{L}_2[\cos(t_1+t_2)]=\dfrac{s_1s_2-1}{(s_1^2+1)(s_2^2+1)}$.

这样，$F(s_1,s_2,s_3,s_4)=\dfrac{s_1s_2-1}{(s_1^2+1)(s_2^2+1)s_3^2(s_4-2)}$.

3 应 用

多维 Laplace 变换可用来解偏微分方程(组)，其方法和步骤跟一维时相类似. 首先，在偏微分方程(组)两边对某些变量取多维 Laplace 变换就能消去未知函数对这些自变量求偏导数的运算，从而得到象函数的较为简单的偏微分方程(组)或代数方程(组)；其次，再解这个方程(组)而得象函数；最后，对象函数取多维 Laplace 逆变换便可得象原函数即为所求偏微分方程(组)的解. 从下面几例可看出，一些用现有方法难于求解的方程，用多维 Laplace 变换均能简便地求解. 这就说明，在应用中多维 Laplace 变换比一维 Laplace 变换具有更大的广泛性和优越性.

例4 解偏微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2u_1}{\partial t_1\partial t_2}-2\dfrac{\partial u_1}{\partial t_1}+\dfrac{\partial u_2}{\partial t_2}+u_2=t_1+t_2+1,\\[2ex] 2\dfrac{\partial^2u_2}{\partial t_1\partial t_2}-\dfrac{\partial u_2}{\partial t_1}+\dfrac{\partial u_1}{\partial t_1}+u_1=(t_1+1)e^{2t_2}-1, \qquad -\infty<t_1,t_2<+\infty,\\[2ex] u_1|_{t_1=0}=0,\ u_1|_{t_2=0}=t_1,\ u_2|_{t_1=0}=t_2,\ u_2|_{t_2=0}=t_1\ .\end{cases}$$

解 记 $U_i(s_1,s_2)=\mathscr{L}[u_i(t_1,t_2)],(i=1,2)$. 利用微分性质和定解条件在方程组两边对 t_1,t_2 取二维 Laplace 变换可得：

$$\begin{cases} s_1s_2U_1-\dfrac{1}{s_1}-2s_1U_1+s_2U_2-\dfrac{1}{s_1^2}+U_2=\dfrac{1}{s_1^2}+\dfrac{1}{s_1s_2^2}+\dfrac{1}{s_1s_2}, \\ 2s_1s_2U_2-\dfrac{2}{s_1}-\dfrac{2}{s_2}-s_1U_2+\dfrac{1}{s_2^2}+s_1U_1+U_1=\dfrac{s_1+1}{s_1^2(s_2-2)}-\dfrac{1}{s_1s_2}. \end{cases}$$

解此代数方程组得

$$\begin{cases} U_1(s_1, s_2)=\dfrac{1}{s_1^2(s_2-1)}, \\ U_2(s_1, s_2)=\dfrac{s_1+s_2}{s_1^2s_2^2}. \end{cases}$$

取二维 Laplace 逆变换可得所求偏微分方程组之解为

$$\begin{cases} u_1(t_1, t_2)=t_1e^{2t_2}, \\ u_2(t_1, t_2)=t_1+t_2. \end{cases}$$

例 5　解第一卦限内的三维 Laplace 方程的边值问题

$$\begin{cases} \Delta u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0, \quad x>0, y>0, z>0, \\ u|_{x=0}=f_1(y, z),\ u|_{y=0}=f_2(x, z),\ u|_{z=0}=f_3(x, y), \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}=f_4(y, z),\ \dfrac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0}=f_5(x, z),\ \dfrac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=0}=f_6(x, y). \end{cases}$$

解　记 $U(s_1, s_2, s_3)=\mathscr{L}[u(x, y, z)]$, $F_1(s_2, s_3)=\mathscr{L}_2[f_1(y, z)]$, $F_2(s_1, s_3)=\mathscr{L}_2[f_2(x, z)]$, $F_3(s_1, s_2)=\mathscr{L}_2[f_3(x, y)]$, $F_4(s_2, s_3)=\mathscr{L}_2[f_4(y, z)]$, $F_5(s_1, s_3)=\mathscr{L}_2[f_5(x, z)]$, $F_6(s_1, s_2)=\mathscr{L}_2[f_6(x, y)]$. 利用微分性质和边界条件在方程两边取三维 Laplace 变换可得

$$s_1^2U-s_1F_1-F_4+s_2^2U-s_2F_2-F_5+s_3^2U-s_3F_3-F_6=0.$$

解得

$$U(s_1, s_2, s_3)=\frac{1}{s_1^2+s_2^2+s_3^2}[s_1F_1+s_2F_2+s_3F_3+F_4+F_5+F_6].$$

取三维 Laplace 逆变换便得所求边值问题的解为

$$u=u(x, y, z)=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s_1^2+s_2^2+s_3^2}[s_1F_1+s_2F_2+s_3F_3+F_4+F_5+F_6]\right\}.$$

特别地，若取 $f_1(y, z)=-2y^2+2z^2$, $f_2(x, z)=x+2z^2$, $f_3(x, y)=x-2y^2$, $f_4(y, z)=1$, $f_5(x, z)=f_6(x, y)=0$, 则有 $F_1(s_2, s_3)=\dfrac{-4}{s_2^3s_3}+\dfrac{4}{s_2s_3^3}$, $F_2(s_1, s_3)=\dfrac{1}{s_1^2s_3}+\dfrac{4}{s_1s_3^3}$, $F_3(s_1, s_2)=\dfrac{1}{s_1^2s_2}-\dfrac{4}{s_1s_2^3}$, $F_4(s_2, s_3)=\dfrac{1}{s_2s_3}$, $F_5(s_1, s_3)=F_6(s_1, s_2)=0$, 所以

$$U(s_1, s_2, s_3)=\frac{1}{s_1^2s_2s_3}-\frac{4}{s_1s_2^3s_3}+\frac{4}{s_1s_2s_3^3},$$

故 $$u=u(x,y,z)=\mathscr{L}^{-1}[U(s_1,s_2,s_3)]=x-2y^2+2z^2.$$

例6 解偏微分方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^3 u}{\partial t_1^3}+2\dfrac{\partial^2 u}{\partial t_2\partial t_3}-\dfrac{\partial u}{\partial t_4}=4t_1t_2-\mathrm{e}^{t_4}, & -\infty<t_1,t_2,t_3,t_4<+\infty,\\ u|_{t_1=0}=u|_{t_2=0}=u|_{t_3=0}=\mathrm{e}^{t_4},\ u|_{t_4=0}=1+t_1t_2^2t_3, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t_1}\Big|_{t_1=0}=t_2^2t_3,\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial t_1^2}\Big|_{t_1=0}=0.\end{cases}$$

解 记 $U(s_1,s_2,s_3,s_4)=\mathscr{L}[u(t_1,t_2,t_3,t_4)]$. 利用微分性质和定解条件在方程两边取四维Laplace变换可得

$$s_1^3U-\frac{s_1^2}{s_2s_3(s_4-1)}-\frac{2s_1}{s_2^3s_3^2s_4}+2s_2s_3U-\frac{2s_2}{s_1s_2(s_4-1)}-\frac{2s_3}{s_1s_3(s_4-1)}+\frac{2}{s_1(s_4-1)}$$
$$-s_4U+\frac{1}{s_1s_2s_3}+\frac{2}{s_1^2s_2^2s_3^2}=\frac{4}{s_1^2s_2^2s_3s_4}-\frac{1}{s_1s_2s_3(s_4-1)}.$$

解得 $$U(s_1,s_2,s_3,s_4)=\frac{2}{s_1^2s_2^3s_3^2s_4}+\frac{1}{s_1s_2s_3(s_4-1)}.$$

取四维Laplace逆变换可得所求偏微分方程之解为

$$u(t_1,t_2,t_3,t_4)=t_1t_2^2t_3+\mathrm{e}^{t_4}.$$

参考文献

1 南京工学院数学教研组. 积分变换, 第2版. 北京: 高等教育出版社, 1982

2 熊大国. 积分变换. 北京: 北京理工大学出版社, 1990

3 王载舆. 数学物理方程及特殊函数. 北京: 清华大学出版社, 1991

Multidimensional Laplace transform and its application

Fan Hongfu

(Department of Basic Studies, ECUT)

Abstract In this paper, the notion of multidimensional Laplace transform is introduced, and its application to solve differential equations is discussed.

Keywords *Laplace transform; differential equation; residue*